Aufgaben

(17) (a) Zeigen Sie:

Die Menge der Fixpunkte einer affinen Abbildung (der Einfachheit halber $f : K^n \to K^n$) ist ein affiner Unterraum.

(b) Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine Abbildung mit der Eigenschaft

$$\underset{\varrho \in \mathbb{R}_{>0}}{\exists} : \underset{x,y \in \mathbb{R}^n}{\forall} : \quad \| f(y) - f(x) \| = \varrho \cdot \| y - x \|$$

f heißt dann **Ähnlichkeit** mit **Ähnlichkeitsfaktor** ϱ und **Isometrie**, wenn $\boldsymbol{\varrho = 1}$. Eine Ähnlichkeit ist zwangsläufig injektiv und affin. Siehe dazu etwa [FG][8] auf den Seiten 79-80, 75 und 30. Die Lektüre dieser Seiten kann auch als Anleitung zur Aufgabe insgesamt dienen.

Zeigen Sie:

Ist $\varrho \neq 1$, dann hat f genau einen Fixpunkt.

(18) (a) Definieren Sie „orthogonal“ oder „stehen senkrecht aufeinander“ für affine Hyperebenen von $\mathbb{R}^n$.

(b) Die affine Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ entstehe als Hintereinanderausführung von drei affinen Spiegelungen an paarweise orthogonalen Ebenen. Beschreiben Sie die drei Spiegelungen und damit dann f durch die Angabe der Bilder bezüglich einer geeigneten Basis.

[8] Die in eckigen Klammern angegebenen Abkürzungen verweisen auf die Literaturangaben auf der Modulseite im Internet.